数理解析研究所講究録
1183巻 2001年 13-26

実簡約群の退化系列表現について

松本久義

1. 状況設定

G を実簡約線形 Lie 群とし G_C をその複素化とする。以下 G の 極大 Compact 部分群 K を固定し θ を対応する Cartan involution とする。g_0 ((resp. k_0) を G (resp. K) の Lie 環とし、 g (resp. k) をその複素化とする。k_0 に対応する g_0 の Cartan involution 並びに その g への複素線形作用素としての拡張を やはり θ で表す。また、σ で g の g_0 に関する複素共役を表す。

P を G の放物型部分群とし $P=LN$ を P の Levi 分解とする。ただし L は P の Levi 部分群であって Cartan involution σ で不変なもので、 N は P の nilradical であるとする。

V を L の admissible な既約表現とするときに, N が V に自明に作用するものとして P の表現と思える。そこで誘導表現 $\mathrm{Ind}_P^G(V)$ をかんがえることができる。このような放物型部分群からの誘導表現は再び admissible な (有限の長さを持った) G の表現ではあるが既約性は一般に成り立たない。このような放物型部分群からの誘導表現を考える事は、実簡約群においては基本的な構成であり、理論の中で重要な役割を果している。われわれの目標はこのような誘導表現の内部構造を明らかにすることである。

2. Kazdhan-Lusztig Algorithm

G 放物型部分群 P が cuspidal であるとは L の半単純部分が Compact Cartan 部分群をもつことである。 この場合 L は 相対離散系列表現 を持っている。 V をそのような L の相対離散系列表現あるいはその極限とする。このとき $\mathrm{Ind}_P^G(V)$ は standard 表現と言われる。G の admissible 表現の virtual character の作る加群を考えると実は standard 表現の指標は基底をなしている。 一方、既約指標も基底をなしているのでその2つの基底の間の「変換行列」が問題になる。実は、Kashiwara-Brylinski, Beilinson-Bernstein によって解かれた highest weight module たちに対する類似の問題の解決 (Kazdhan-Lusztig 予想) をふまえて Vogan-Lusztig によって、

この「変換行列」を計算する アルゴリズムが知られている。このアルゴリズムを使えば、放物型部分群からの任意の誘導表現の既約成分は以下のようにして原理的には全てわかることになる。

まず V を L の既約表現として、$[V]$ を対応する指標とする。$\mathcal{S}$ を L の standard 表現の指標の集合とするとき 上記の Kazdan-Lusztig のアルゴリズムを使えば

$$[V] = \sum_{\Theta \in \mathcal{S}} c_\Theta \Theta.$$

と書ける。 ただし c_Θ は「計算可能な」整数である。さて、放物型部分群からの誘導が完全系列を保つことを考えると、そのような誘導は virtual character に対しても定義され 加法と整合的な事がわかる。したがって、次をうる。

$$[\mathrm{Ind}_P^G(V)] = \sum_{\Theta \in \mathcal{S}} c_\Theta \mathrm{Ind}_P^G(\Theta).$$

ここで、$\mathrm{Ind}_P^G(\Theta)$ は induction-by-stage を考えるとそれ自体がじつは G の standard 表現の指標となっている。したがって、再び Kazdan-Lusztig のアルゴリズムを使えば $\mathrm{Ind}_P^G(\Theta)$ を G の既約指標の和で表すことが出来て、上の式とあわせて 結局 V の誘導表現の指標 $[\mathrm{Ind}_P^G(V)]$ を既約指標の和で表す事ができる事になる。

このような Kazdan-Lusztig のアルゴリズムの存在は極めて重要であり表現論における一つの標準理論を形作っているわけだが、この場合これで誘導表現が理解できるというわけではない。まず、アルゴリズム自体がかなり複雑でありランクが低い場合以外は実際問題として計算が実行可能ではない。さらに、このような計算には 本来誘導表現とは関係ない既約指標が含まれ、最後にはキャンセルして消えることになるようになっている。したがって、誘導表現の構造についての知識をこのようなアルゴリズムの存在だけから取り出すのは困難である。次節で モチベーションとして 複素群の場合を解説するが、それから想像される誘導表現の構造を明らかにするには何かほかのアイデアが必要なように思われる。

3. Complex case

放物型部分群からの誘導表現の中でも V が一次元であり、K の自明な表現を含むようなものは、球退化系列表現と言われる。この場合 V がじゅうぶん正で、誘導

表現の無限小指標が integral であるなら G の有限次元既約表現が商表現となる。このような場合は P が極小放物型部分群の場合 Kostant らによって可約性などが調べられていた。このような球退化系列表現の場合は特に構造が幾何的な対象との関連において理解できるのではないかと考え得る。(実際には難しいところもあるのだが。) そのような事を説明するため、状況が直接的ではっきりしている複素群の場合にどのようになっているのか、解説しておく。

まず、他の節とは違いこの節だけ特別に以下のように約束する。G をこの節では連結複素半単純線形 Lie 群とし、 g でその Lie 環を表す。(第 1 節の規約と違い g は複素化ではない。 この場合はもちろん g 自体が複素 Lie 環ではあるが。) ここで g_0 を g の Compact real form とする。σ を g の g_0 に関する複素共役とする。$X \in g$ に対して $(X, \sigma(X))$ を対応させることで g を $g \oplus g$ に real form として埋め込めることができる。つまり、この埋め込みによって $g \oplus g$ は g の複素化とみなせる。g の固定された Compact form g_0 の複素化は $g \oplus g$ のなかでは 対角集合 $\Delta(g) = \{(X, X) \in g \oplus g\}$ と同一視される。

良く知られているように、G の admisssible 既約表現を考えるかわりに Harish-Chandra $(g \oplus g, \Delta(g))$-module を考えることができる。そこで、上述のようなパラメーターが positive であるような球退化系列表現の Harish-Chandra module を以下のような形で構成する。まず g の σ-不変な Cartan 部分環 h を一つ固定しておく。さらに h を含む g の 放物型部分環 p も固定する。すると p は Levi 分解 $p = l + n$ であって Levi part l が σ -不変になるようなものをもつ。ρ_p を l の一次元正則表現であって

$$\rho_p(X) = \frac{1}{2}\mathrm{trace}(\mathrm{ad}(X)|_n) \quad (X \in l)$$

で定義されるものとする。l の一次元正則表現 $\lambda : l \to C$ にたいして generalized Verma module $M_p(\lambda)$ を次のように定める。

$$M_p(\lambda) = U(g) \otimes_{U(p)} C_{\lambda - \rho_p}.$$

ここで $M_p(\lambda)$ 上の複素線形準同型環 $\mathrm{End}_C(M_p(\lambda)$ を考えるとこれは C-algebra である半面、$U(g)$ の $M_p(\lambda)$ への作用を考える事により両側 $U(g)$-module の構造を持つ。 さらに adjoint action によって第 3 の $U(g)$-module の構造を持つ。

この $\mathrm{End}_C(M_p(\lambda)$ は大きすぎるの以下のような部分空間を取り出す。

$$L(M_p(\lambda), M_p(\lambda)) = \{\phi \in \mathrm{End}_C(M_p(\lambda) \mid \dim \mathrm{ad}(U(g))\phi < \infty\}.$$

すると、

（1） $L(M_p(\lambda), M_p(\lambda))$ は $\mathrm{End}_C(M_p(\lambda)$ の C-subalgebra である。

（2） $X, Y \in g$ および $\phi \in L(M_p(\lambda), M_p(\lambda))$ に対して

$$(X, Y)\dot{\phi} = X\phi - \phi Y.$$

と定める事により、 $L(M_p(\lambda), M_p(\lambda))$ は Harish-Chanda $(g \oplus g, \Delta(g))$-module の構造を持つ。

P を p に対応する G の放物型部分群としよう。実は λ が " negative" (この時 $M_p(\lambda)$ は既約になる) な時、 $L(M_p(\lambda), M_p(\lambda))$ は Harish-Chandra module として、パラメーターがpositiveであるような P に関する球退化系列表現 の Harish-Chandra module と同型になる事がわかっている。

それでは、$L(M_p(\lambda), M_p(\lambda))$ は C-algebra としてはどのようなものになるであろうか？$X = G/P$ なる generalized flag manfold を考え $\mathcal{D}_\lambda$ を X 上の twisted differential operator の環の層とする。上述の オリジナルな highest weight module に対する Kazhdan-Lusztig 予想 の研究などで明らかになったことは (Kashiwara, Borho, Brylinky, Bernstein...), C-algebra として $L(M_p(\lambda), M_p(\lambda))$ は $\mathcal{D}_\lambda$ の global section のなす C-algebra $\Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda)$ と同型であることである。

$\Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda)$ には作用素の階数によって filtered algebra の構造が入る。$\mathcal{O}_{T^*X}$ を X の 正則余接バンドル の代数多様体としての正則関数の層とするとき、$\Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda)$ の filtered structure に随伴する graded algebra $\mathrm{gr}\Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda)$ は $\mathcal{O}_{T^*X}$ の大域切断の環 $\Gamma(T^*X, \mathcal{O}_{T^*X})$ と自然に同型になる。したがって、P に関する球退化系列表現 は、T^*X の量子化とみなせるのである。

T^*X にはいる自然な symplectic structure に関する moment map を $\mu : T^*X \to g^* \cong g$ とする。(ここで g^* は g と Killing form によって同一視する。)

ここで、 μ の image は $\mathrm{Ad}(G)n$ となることがわかるが、これは p の Richardson orbit $\mathcal{O}_p$ という一つの g の $\mathrm{Ad}(G)$ に関する nilpotent orbit の閉包になっている。例えば g が A_n 型単純 Lie 環 あるいは p が Borel 部分環なら、μ は双有理写像で

あり、さらに $Image(\mu)$ は normal である。このような場合は、μ によって引き起こされる準同型により、$\Gamma(T^*X, \mathcal{O}_{T^*X})$ と $\mathcal{O}_p$ の座標環は同型になる。一般には、μ は双有理とは限らないがそのような状況では、対応する球退化系列表現 はもっとも退化したパラメーターにおいて可約になる。このような可約性は、Barbasch-Vogan による複素半単純群の unipotent 表現の研究において、コントロールできることが示されているが、このことは Barbasch による複素古典群の既約ユニタリ表現の分類において重要な役割を果している。

結論としては、以上のようなことから球退化系列表現の構造が moment map や Richardson orbit といった幾何的な対象と結びつけられ理解することができるということである。

一般の実半単純群については状況はいまのところ複素群のようには直接的に退化系列表現そのものを幾何的に解釈することはできていない。(あとで述べる Associate variety のように表現の不変量と言う形で幾何的な対象を取り出せはするが。) また、複素群のばあい nilpotent orbit の境界はすべて余次元が 2 以上という特殊事情があったため、実半単純群の場合には複素群では現われなかった表現の可約性が出現したりして事情はいっそう複雑になる。

4. Cohomological induction

ここでは、基本的な概念である Cohomological induction の解説を一応するが、詳細まで書くのはページ数的に無理なので、ちゃんとした解説は [Knapp-Vogan 1995] の XI 章を見て欲しい。ここでの記号はこの本に沿っている。θ-stable な放物型部分環からの誘導については今や常識と言えるが、一般の場合は standard 表現についてのいくつかの論文を除けばこの本ぐらいしか文献はないようである。

ここでは再び第 1 節のように G, K, g, θ, σ を取る。また q を g の 放物型部分環で Levi 分解 $q = l + u$ で Levi part l が θ かつ σ 不変であるようなものを持つようなものとする。L_C を l の G_C における解析的部分群とし、$L = L_C \cap G$ とおく。すると、l は L の Lie 環の複素化になることが l が σ 不変であることからわかる。

一般に $\mathbf{a}$ を g の部分環で C を G の Compact 部分群とし、G_C の g の上での adjoint action の C への制限を考えたとき、$\mathbf{a}$ はその作用で閉じているとする。このような場合 複素ベクトル空間が Lie 環 h と Compact 群 C の左加群構造を与え

る作用を同時に持ち、二つの作用が adjoint action との整合性を持つとき、 (h, C)-加群と言うのだが, それらの作る Category を $(h, C) - Mod$ と書くことにしよう。

V を $(l, L\cap K)$-module とするとき、u が V に自明に作用すると定めて $(q, L\cap K)$-module と見做す。

次に $({}^u\mathcal{R}^{g,K}_{q,L\cap K})^0 : (g, L\cap K) - Mod \to (g, K) - Mod$ を $(g, K) - Mod$ から $(q, L\cap K) - Mod$ への忘却関手の右随伴関手とする。この関手は左完全でありその i-次右導来関手を $({}^u\mathcal{R}^{g,K}_{q,L\cap K})^i$ と書く。ここで、u という文字が左肩についているのは unnormalized ということで通常の parabolic induction では ρ-shift をしない流儀に対応している。ρ-shift をする normalized version は $({}^n\mathcal{R}^{g,K}_{q,L\cap K})^i$ と書かれるが、じつは 通常の parabolic induction と違って shift する一次元表現が $L\cap K$ 上実現できるとは限らない。そこで、[Vogan 1988] において $L\cap K$ の metaplectic double cover $(L\cap K)^\sim$ なる 2 重被覆群が導入され, $({}^n\mathcal{R}^{g,K}_{q,L\cap K})^i$ は $(q, (L\cap)^\sim)$-module でその $-\rho$-shift が $(q, L\cap K)$-module に reduce されるものに対して定義されるように定式化される。[Vogan 1988] のやりかたは一般の場合でも一応大丈夫だが、その際通常の σ-stable の場合の parabolic induction との整合性が一般には失われる。[Knapp-Vogan 1995] では工夫をして θ-satable case と σ-satable case の両方と整合的な ρ-shift の定義が与えられている。

より詳しく書けば、もし q が σ-satble であれば、$q\cap g_0$ は q の real form となり $Q\subseteq G$ なる放物型部分群の Lie 環になる。このとき $({}^n\mathcal{R}^{g,K}_{q,L\cap K})^0(V)\cong \mathrm{Ind}^G_Q(V)$ とみなせ高次の導来関手は消えてしまう。

もし、 q が θ-stable かつ V にある種の regularity と positivity を仮定すれば、$i=\dim u\cap k$ 以外では導来関手は消えてしまい、$({}^n\mathcal{R}^{g,K}_{q,L\cap K})^{\dim u\cap k}(V)$ は既約性や unitarizability を保つ良く知られた cohomological induction になる。特に V が一次元 unitary 表現のときこれは derived functor module といわれる。q が compact Cartan subalgebra を含む θ-stable Borel subalgebra ならこれは離散系列表現になる。

一般に $q=b$ が Borel subalgebra (θ や σ -stable とは限らない) で V が適当な一次元表現であるとき $({}^n\mathcal{R}^{g,K}_{q,L\cap K})^{\dim u\cap k}(V)$ は、section 2 に述べた standard 表現 (に同型) である。standard 表現については transfer theorem ([Knapp-Vogan 1995] Theorem 11.87, also see [Schmid 1988]) によって適当な条件のもとで、b の polarization を

取り換えても同型になることが示されている。このことによって、section 2 に述べた形に一般の standard 表現が直せるのである。([Schmid 1988])

5. Change of polarization

ここでは退化系列を調べる際有効な道具である Change of polarization について解説する。

G, K, g, θ, σ,... などは section 1 で定めれた通りとする。

定義 5.1 g の σ-stable prabolic subalgebra p と θ-stable parabolic subalgebra q の組 (p,q) が $\sigma\theta$-pair であるとは、 ある σ かつ θ-stable Cartan subalgebra h が存在して $h \subseteq p \cap q$ となることとする。

次の結果が成り立つ。

命題 5.2 (p,q) を $\sigma\theta$-pair とするとき $p = m + n$, $q = l + u$ なる Levi 分解であって、m, l はともに σ かつ θ-stable な Levi part であり、$l \cap p$ (resp. $m \cap q$) は l (resp. m) の parabolic subalgebra になるようなものが存在する。この場合 ある σ かつ θ-stable Cartan subalgebra h が存在して $h \subseteq m \cap l$ となっている。

L, M, P などをそれぞれ l, m, p にこれまで書いたようなやりかたで対応させられた G の部分群とする。また、上のような θ-stable Cartan subalgebra h をとり Δ を (g,h) にかんするルート系とする。また g の 部分空間 V にたいして $\Delta(V)$ をそのルート空間が V に含まれるような Δ の元全体とする。また $\rho(V) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta(V)}\alpha$ と書く。もし、h を含む parabolic subalgebra の半単純部分と h との共通部分上で $\rho(V)$ が消えるようなら、 $\rho(V)$ を自然に その 1 次元表現と思うことにする。

次が基本的な結果である。

定理 5.3 (Change of polarization) *(p,q) を $\sigma\theta$-pair とし、命題 5.2 の Levi 分解 $p = m + n$, $q = l + u$ および θ-stable Cartan subalgebra h で $h \subseteq m \cap l$ をみたすものを考える。*

V を Harish-Chanda $(l \cap m$、$L \cap M \cap K)$-module で infinitesimal character $\lambda \in h^*$ であって $Re\langle\lambda,\alpha\rangle > 0$ が全ての $\alpha \in \Delta(u)$ に対して成り立つとする。このとき

$$[\mathrm{Ind}_P^G(({}^u\mathcal{R}_{q\cap m, L\cap M\cap K}^{m, M\cap K})^{\dim u\cap k\cap m}(V))] = [{}^u\mathcal{R}_{q,L\cap K}^{g,K})^{\dim u\cap k}(\mathrm{Ind}_{P\cap L}^{L}(V) \otimes C_\eta)]$$

がなりたつ。ただし C_η は微分が $\rho(u)-\rho(u\cap m)$ になるような L の一次元表現である。$[\cdot]$ は *section2* で導入した *virtual character module* での *image.*

Remark 上記の定理の証明は、両辺は V に関して加法的であることから section2 の Kazdhan-Lusztig 予想をもちいて V が standard 表現の場合に帰着する。V が standard 表現の場合は induction-by-stage を使って 一度の cohomological induction にまとめてしまえば 両辺の $[\cdot]$ の中は (g,K)-standard 表現になるので、これは transfer theorem を使って示せるという方針である。上記において virtual character module のなかで等しいというのを、module として同型になるというようにしたいところであるが一般にはよくわからない。一見、standard 表現 に帰着する証明のやりかたに依存した非本質的な制約のようにも見えるが、次のような考察から状況は微妙である。

(考察) induction-by-stage を使って一度の cohomological induction にまとめてしまえば $[\cdot]$ の中は いずれも 共通の Levi part $l\cap m$ をもつ $p_1=q\cap m+n$ と $p_2=p\cap l+u$ をおきかえる polarization の変換をやっているように解釈できるのだが 実は一般には p_1 と p_2 は G_C で共役ではない。したがって p_1,p_2 のレベルで transfer theorem にあたるものを定式化をするのは難しい。証明のように standard 表現でばらして Borel subalgebra のにもっていくと共役になるのである。

ただし、Joseph Johnson による derived functor module の standard 表現による resolution の存在を使えば、次はいえて、退化系列などを扱う場合は十分である。

定理 5.4 (Change of polarization) 定理 *5.3* の設定に加え、V が *derived functor module* であるとき、

$$\mathrm{Ind}_P^G(({}^u\mathcal{R}_{q\cap m,L\cap M\cap K}^{m,M\cap K})^{\dim u\cap k\cap m}(V))\cong {}^u\mathcal{R}_{q,L\cap K}^{g,K})^{\dim u\cap k}(\mathrm{Ind}_{P\cap L}^L(V)\otimes C_\eta)$$

が成り立つ。

例 1 G をこの節では連結複素半単純線形 Lie 群とし, この例においては section 3 の設定・記号をもちいる。p を g の任意の parabolic subalgebra とし $p=l+n$ を Levi 分解とする。$\bar{p}$ を p の opposite algebra とすると $(p\oplus\bar{p},p\oplus p)$ は $\sigma\theta$-pair であって、この場合は $L=M$ となる。C_λ を L の 一次元 unitary 表現であって、中心

のベクトル部分上自明なものとすると、上記の change of polarization を適用して、

$$\mathrm{Ind}_P^G(C_\lambda) \cong ({}^n\mathcal{R}_{p\oplus p, L\cap K}^{g\oplus g, K})^{\dim n}(C_\lambda).$$

を得る。

[Enright 1976] によれば [Vogan-Zukerman 1984] を踏まえれば、G の derived functor module は integral な infinitesimal character をもつ unitary 退化系列表現 (unitary な一次元表現からの parabolic induction) になっていることが知られていたのだがこれはわれわれの立場からのこの事実の解釈である。

例 2 ([Speh 1983])

$G = GL(2n, R)$ とし T_n を G の maximal compact torus とする。例えば、$k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ として $T_n = \{diag(k(\theta), ..., k(\theta)) \in G \mid \theta \in R\}$ とおけばよい。ここで diag は diagonal ということで $k(\theta)$ の n 個のコピーを block-wise に対角線に並べた $2n \times 2n$ 行列をかんがえている。このとき L を T_n の G における中心化群とすると $L \cong GL(n, C)$ となる。l を複素化された L の Lie algebra とすると ある複素化された G の Lie algebra g の θ-stable parabolic subalgebra q であって Levi 分解 $q = l + u$ をもつものがある。C_λ を T_n の一次元表現であって u に関して適当ないみで positive なものとするとき C_λ を自然に L の一次元表現とみなしたときの derived functor module $S_n(\lambda) = ({}^n\mathcal{R}_{q,L\cap K}^{g,K})^{\frac{n(n+1)}{2}}(C_\lambda)$ を Speh 表現という。Speh は $GL(n, R)$ の任意の derived functor module が Speh 表現と自明な表現のいくつかの外部テンソル積からの parabolic induction で書けることを示したがそれは我々の立場からは次のようにみれる。

$G = GL(n, R)$ とし、T を G の任意の compact torus とする。$K = O(n)$ と標準的にとる。共役を考えれば、T に対しては $n = 2n_1 + \cdots + 2n_\ell + m$ なる正整数への n の分割が定まり、 $T = diag(T_{n_1}, T_{n_2}, ..., T_{n_\ell}, 1_m)$ となる。ただし 1_m は $m \times m$-単位行列である。 λ を T の 一次元表現とするとこの表示に対応して、λ_i なる T_{n_i} の一次元表現が定まり λ は λ_i $1 \le i \le \ell$ たちの外部テンソル積表現となる。L を T の G における中心化群とすると $L \cong GL(n_1, C) \times \cdots \times GL(n_\ell, C) \times GL(m, R)$ となる。ただし $GL(n_i, C)$ と同型な factor は $diag(1_{2n_1+\cdots+2n_{i-1}}, GL(2n_i, R), 1_{2n_{i+1}+\cdots+2n_\ell+m})$ における $diag(1_{2n_1+\cdots+2n_{i-1}}, T_{n_i}, 1_{2n_{i+1}+\cdots+2n_\ell+m})$ の中心化群である。

$M = diag(GL(2n_1, R), ..., GL(2n_\ell, R), GL(m, rel))$ とおく。l, m をそれぞれ L および m の複素化された Lie 環とすると、それぞれを Levi part にもつ g の parabolic subalgebra q および p がとれそれぞれ θ あるいは σ-stable にできる。ここで λ は q に関して適当な正値性をみたすとしておく。

以上の状況下において、(p, q) は $\sigma\theta$-pair であることがわかるので、change of the polarization を使うと

$$({}^n\mathcal{R}_{q,L\cap K}^{g,K})^{\dim u\cap k}(C_\lambda) \cong \mathrm{Ind}_P^G(S_{n_1}(\lambda_1) \otimes \cdots S_{n_\ell}(\lambda_\ell) \otimes C_\eta)$$

となる。ここで C_η は適当な一次元表現である。

例 3　$G = GL(n, H)$ としたとき 例 2 と類似の状況がなりたつ。この場合 $L = GL(n, C)$ の複素化された Lie 環を Levi part にもつ derived functor module を Speh 表現とすると、任意の G の derived functor module は rank の低い群の Speh 表現の幾つかと一次元表現の外部テンソル積からの prabolic induction と同型になる。

例 4　$G = Sp(m, n)$ とする。P を任意の G の放物型部分群とすると、$m = p + 2\sum_{i=0}^{\ell} n_i$, $n = q + 2\sum_{i=0}^{\ell} n_i$ なる正整数 $n_1, ..., n_\ell$ および 非負整数 p, q が存在して、P の Levi part M は $Sp(p, q) \times GL(n_1, H) \times \cdots \times GL(n_\ell, H)$ と同型になる。このことを見る為には、G の以下のような実現がわかりやすい。正整数 k に対して、

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1_k \\ 1_k & 0 \end{pmatrix}$$

とおき、また、

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & 1_q \end{pmatrix}$$

とおく。さらに、$J = diag(I_{p,q}, J_{n_1}, ..., J_{n_\ell})$ とおく。すると、

$$G \cong \{g \in GL(m+n, H) \mid {}^t\bar{g}Jg = J\}$$

となる。ここで $\bar{g}$ は各成分において H における共役をとったものである。このような G の実現においては M は

$$M = \{diag(g, g_1, {}^t\bar{g_1}^{-1}, \cdots, g_\ell, {}^t\bar{g_\ell}^{-1}) \mid g \in U(p, q; H), g_i \in GL(n_i, H) \ (1 \le i \le \ell)\}$$

となる。ただし $U(p,q;H)=\{g\in GL(p+q,H)\mid {}^t\bar{g}I_{p,q}g=I_{p,q}\}$ でありこれは $Sp(p,q)$ の一つの実現である。ここで $U(k,r)=U(k,r;C)=\{g\in GL(k+r,C)\mid {}^t\bar{g}I_{k,r}g=I_{k,r}\}$ を考えるとき、$L=diag(U(p,q;H),U(n_1,n_1),\cdots,U(n_\ell,\ell))$ とおくと、これは上記の実現のもとで G の部分群になる。ここで、L の $U(n_i,n_i)$ と同型な factor を L_i と書こう。L の複素化された Lie 環を l とするとき G の複素化された Lie 環 g の θ-stable parabolic subalgebra q であって l を Levi part とするものがとれる。u を q の nilradical とする。P の複素化された Lie 環を p とするとき (p,q) は $\sigma\theta$-pair になる。この $\sigma\theta$-pair にかんする change of polarization は以下のように記述される。σ_0 を任意の $Sp(p,q)$ の既約 unitary 表現、$1\leq i\leq \ell$ に対して σ_i を $GL(n_i,H)$ の Speh 表現とする。このとき infinitesimal character の適当な正値性のもとで

$$\mathrm{Ind}_P^G(\sigma_0\otimes\sigma_1\otimes\cdots\otimes\sigma_\ell)\cong({}^u\mathcal{R}_{q,L\cap K}^{g,K})^{\dim u\cap k}(\sigma_0\otimes\mathrm{Ind}_{P_1}^{L_1}(\lambda_1)\otimes\cdots\otimes\mathrm{Ind}_{P_\ell}^{L_\ell}(\lambda_\ell)).$$

ここで $1\leq i\leq\ell$ に対して $P_i=P\cap L_i$ かつ λ_i は P_i の適当な一次元表現である。この P_i は Siegel parabolic subgroup といわれこれに関する退化系列表現は次節で紹介するようにいろいろな人によって詳しく調べられている。したがって、上の左辺の表現の構造が $U(n,n)$ の Siegel Parabolic subgroup にかんする退化系列表現という良く知られた場合に帰着できることがわかる。このことと、上の例 3 でのことを組み合わせると、$Sp(m,n)$ の場合は derived functor module と一次元 unitary 表現の tensor 積になっているような表現からの parabolic induction についての分解公式が得られる。これは特別な場合として unitary 退化系列をふくんでいることに注意しておく。

6. U(m,n)

最後に比較的状況が簡単な $U(m,n)$ の場合について解説しよう。この場合には分類なども含めて既約表現の性質が他の古典型群よりも素直になっていることが知られている。まず、Harish-Chandra による一般論として 既約表現には 群上の超関数として実現される指標が定義できるが、その単位元における超関数としての特異性を記述する wave front set を考える事が出来る。これは 群の余接束の単位元におけるファイバーの閉部分集合になるのであるが、Killing form を使うことにより G の

Lie 環の部分集合とみなせる。さらに指標が類関数であることより wave front set は G による adjoint action で不変である。また 指標は 表現が infinitesimal character を持つことより、群上の両側不変微分作用素たちの同時固有関数になっている。このことから、wave front set は nilpotent cone に含まれることがわかる。結論としては、既約表現の wave front set はいくつかの 実 nilpotet orbit の合併になっていることがわかる。とくに $U(m,n)$ の integral infinitesimal character を持つ既約表現については wave front set は Barbasch-Vogan の結果などを組み合わせて容易に一つの実 nilpotent orbit の閉包になっていることがわかる。(このようなことは複素群などを除けば 他の群では期待できない。) さらに Barbasch-Vogan は、integral infinitesimal character を持つ既約表現の分類が wave front set と universal enveloping algebra における annihilator でできることを見出している。([Barbasch-Vogan 1983])

さて、退化系列の話にもどると $G = U(n,n)$ は Siegel parabolic subgroup という Levi Part が $GL(n,C)$ と同型になる極大放物型部分群 P_S を持つが、それに関する退化系列表現 (unitary とはかぎらない一次元表現からの誘導表現) については全節で言及したように色々な研究がありかなり詳細な構造が解明されている。([Lee 1994], [K.Johnson 1990], [Sahi 1993], etc.)

この場合の退化系列表現が可約になるのは integral infinitesimal character を持つ場合であり、その場合 infinitesimal character が regular ならば有限次元既約表現が部分表現か商表現かのいずれかとして含まれる。infinitesimal character が regular でない場合は translation principle によって regular な場合の極限として理解される。有限次元既約表現が部分表現として、含まれる場合と商表現として出てくる場合は互いに dual の関係になっている。いずれにしても、この場合すべての既約な組成因子は重複度 1 で現われる。さらに Siegel parabolic subgroup P_S の実 Lie 環 の nilradical を n_0 で表すと、$Ad(G)n_0$ に含まれる $Ad(G)$-nilpotent orbit 全体と 有限次元既約表現が商として現われる P_S に関する退化系列表現の既約組成因子の間には wave front set を介して 1 対 1 対応がついていることがわかる。

さて、一般の放物型部分群の場合はどうであろうか。こんどは $G = U(m,n)$ とする。P を任意の G の放物型部分群とすると、$m = p + 2\sum_{i=0}^{\ell} n_i$, $n = q + 2\sum_{i=0}^{\ell} n_i$ なる正整数 $n_1, ..., n_\ell$ および 非負整数 p, q が存在して、P の Levi part M は $U(p,q) \times$

$GL(n_1, C) \times \cdots \times GL(n_\ell, C)$ と同型になる。このことを見る為には $Sp(m, n)$ を論じた 5 の例 4 の時と同様に、G の以下のような実現がわかりやすい。5 の例 4 とまったく同様に J を定めると、

$$G \cong \{g \in GL(m+n, C) \mid {}^t\bar{g}Jg = J\}$$

となる。このような G の実現においては M は共役を適当に取ってやると

$$M = \{diag(g, g_1, {}^t\bar{g_1}^{-1}, \cdots, g_\ell, {}^t\bar{g_\ell}^{-1}) \mid g \in U(p,q), g_i \in GL(n_i, C) \ \ (1 \le i \le \ell)\}$$

と表すことができる。一方

$$L = \{diag(g, g_1, \cdots, g_\ell,) \mid g \in U(p,q), g_i \in U(n_i, n_i) \ \ (1 \le i \le \ell)\}$$

と置き、L の $U(n_i, n_i)$ と同型な factor を L_i と書こう。L の複素化された Lie 環を l とするとき G の複素化された Lie 環 g の θ-stable parabolic subalgebra q であって l を Levi part とするものがとれる。u を q の nilradical とする。P の複素化された Lie 環を p とするとき (p, q) は $\sigma\theta$-pair になる。この場合に change of polarization を考えると こんどはある種の一次元表現の正値性条件 (大体 compact part 上の部分が vector part 上の部分に比べて十分大きいというものになる) のもとで $U(m, n)$ の退化系列表現は $L_i \cong U(n_i, n_i) \quad (1 \le i \le \ell)$ たちの Siegel parabolic subgroup に関する退化系列表現の外部テンソル積表現からの θ-stable な q にかんする cohomological induction の形に書き直せる。 このような場合 cohomological induction は exact かつ既約性をたもつので結局 $U(m, n)$ の退化系列表現は良く知られた特別な Siegel parabolic case に帰着できるのである。特に unitary な一次元表現からの誘導表現は translation principle を合わせて使うと この場合に帰着され、既約分解公式が得られる。([Matumoto 1996])

さて、この結果がカバーしているところには 有限次元既約表現が部分表現か商表現かのいずれかとして含まれる場合特に 球退化系列の部分は入ってこない。ただし translation principle などを使えばそのような所に対してもある程度の知見は得られる。とくに有限次元既約表現が商表現として出て来る場合の既約部分表現は理解することができさらに次がいえる。

定理 $G = U(m,n)$ の 任意の放物型部分群 P に対して、有限次元既約表現が商表現として出て来るような 退化系列表現を考える。その既約部分表現はすべて重複度1で現われる derived functor module になり wave front set を介して $Ad(G)n_0$ の open $Ad(G)$-nilpotent orbit と1対1対応がついている。ただし、n_0 は P の実Lie環 の nilradical である。

References

[Barbasch-Vogan 1983] Weyl group representations and nilpotent orbits, in "Representation Theory of Reductive Groups" Birkhäuser, 21-33.

[K.Johnson 1990] Degenerate principal series and compact groups. Math. Ann. 287 (1990), no. 4, 703–718.

[Knapp-Vogan 1995] "Cohomological Induction and Unitary Representations" Princeton University Press 1995.

[Lee 1994] On some degenerate principal series representations of U(n,n). J. Funct. Anal. 126 (1994), no. 2, 305–366

[Sahi 1993] Unitary representations on the Shilov boundary of a symmetric tube domain. Representation theory of groups and algebras, 275–286, Contemp. Math., 145, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[Schmid 1988] Geometric construction of representations, *Adv. Stud. in Pure Math.* vol. 14, 349-368.

[Speh 1983] Unitary representations of Gl(n, R) with nontrivial (g, K)-cohomology, *Invent. Math.* **71** (1983), 443–465.

[Vogan 1988] Irreducibilities of discrete series representations for semisimple symmmetric spaces, *Adv. Stud. in Pure Math.* vol. 14, 381-417.